Feladat 1. *(1pt) Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a* $\mathbf{D}_4$ *csoport?*

Feladat 2. *(1pt) Határozzuk meg izomorfia erejéig a* 60*, a* 180*, és az* 540 *elemű Abel-csoportokat, és szemléltessük Hasse-diagrammal, hogy ezek közül melyek melyekbe ágyazhatóak be.*

Feladat 3. *(1pt) Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a* $\mathbb{Z}$ *csoport?*

Feladat 4. *(2pt) Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a* $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ *csoport?*

Feladat 5. *(2pt) Hány részcsoportja van* $\mathbb{Z}_2^4$*-nek?*

Feladat 6. *(2pt) Hány részcsoportja van* $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$*-nak?*

Feladat 7. *(2pt) Hány részcsoportja van* $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$*-nek?*

Feladat 8. *(2pt) Mutassuk meg, hogy ha* $k \mid n$*, akkor minden* n *elemű Abel-csoportnak van* k *elemű részcsoportja.*

Feladat 9. *(2pt) Mutassuk meg, hogy ha* $k \mid n$*, akkor minden* n *elemű Abel-csoportnak van* k *elemű homomorf képe.*

Feladat 10. *(3pt) Legyen* $\mathbf{G}$ *az a csoport, amelynek alaphalmaza* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$*, és amelyen a szorzás a következőképp definiált művelet:*

$$(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) := (x_1 + x_2 + 2y_1, y_1 + y_2),$$

itt természetesen a műveletek modulo 4 *értendők. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a* $\mathbf{G}$ *csoport?*

Feladat 11. *(3pt) Adjuk meg* $\mathbf{Q}$ *automorfizmusait, és azok rendjeit.*

Feladat 12. *(3pt) Mutassuk meg, hogy* $\operatorname{Out}\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{V}$.

Feladat 13. *(3pt) Milyen* k *természetes számok esetén igaz, hogy a* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, k)$ *csoport a belső direkt szorzata az* $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, k)$ *és a* $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *csoportoknak? (*I *a* $k \times k$ *méretű egységmátrixot jelöli.)*

Feladat 14. *(3pt) Legyen* p *prímszám. Igazoljuk, hogy tetszőleges* n *esetén a* $\mathbb{Z}_p^n$*, mint Abel-csoport részcsoportjai, illetve* $\mathbb{Z}_p^n$*, mint* $\mathbb{Z}_p$ *feletti vektortér alterei megegyeznek. Igaz ugyanez a* $\mathbb{Q}$ *csoportra/testre is?*

Feladat 15. *(3pt) Egy* $\mathbf{G}$ *csoportot* direkt felbonthatatlannak *nevezünk, ha nem léteznek olyan nemtriviális* $\mathbf{H}_1$*,* $\mathbf{H}_2$ *csoportok, hogy* $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$*. A* $\mathbf{G}$ *csoport* direkt prím*, ha bármely* $\mathbf{K}_1$*,* $\mathbf{K}_2$ *csoportokra, amelyekre* $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$*-nek van* $\mathbf{G}$*-vel izomorf részcsoportja, teljesül az, hogy* $\mathbf{K}_1$*-nek vagy* $\mathbf{K}_2$*-nek is van* $\mathbf{G}$*-vel izomorf részcsoportja. Igazoljuk, hogy minden véges direkt prím csoport direkt felbonthatatlan. Mutassuk meg továbbá, hogy* $\mathbb{Z}$ *direkt prím.*

Feladat 16. *(3pt) A* $\mathbf{G}$ *csoport* direkt prím*, ha bármely* $\mathbf{K}_1$*,* $\mathbf{K}_2$ *csoportokra, amelyekre* $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$*-nek van* $\mathbf{G}$*-vel izomorf részcsoportja, teljesül az, hogy* $\mathbf{K}_1$*-nek vagy* $\mathbf{K}_2$*-nek is van* $\mathbf{G}$*-vel izomorf részcsoportja. Határozzuk meg, hogy melyek azok a véges Abel-csoportok, amik direkt prímek.*

Feladat 17. *(3pt) Egy* $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbf{G}$ *automorfizmus esetén* $\operatorname{Fix}\varphi := \{g \in G : g\varphi = g\}$*. Igazoljuk, hogy* $\operatorname{Fix}\varphi$ *mindig részcsoportja* $\mathbf{G}$*-nek. Igaz, hogy mindig normálosztó?*

Feladat 18. *(3pt) Legyen* $k > 2$ *természetes szám. Igazoljuk, hogy* $\mathbf{D}_k \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbf{D}_{2k}$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* k *páratlan.*

Feladat 19. *(3pt) Igaz, hogy amennyiben* $\mathbf{G}$ *és* $\mathbf{H}$ *véges Abel-csoportok, akkor* $\mathbf{H}$ *akkor és csak akkor ágyazható be* $\mathbf{G}$*-ve, ha homomorf képe* $\mathbf{G}$*-nek?*

Feladat 20. *(3pt) Igazoljuk vagy cáfoljuk a következő állítást: ha* $\mathbf{G}$ *és* $\mathbf{H}$ *véges Abel-csoportok, és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{G}$ *és* $\mathbf{H}$ *ugyanannyi* n *rendű elemet tartalmaznak, akkor* $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$*.*

Feladat 21. *(4pt) Tekintsük az* $\mathbf{A}_5$ *csoport* $\pi := (12)(34)$ *elemét. Van egy halmazunk, amiben eredetileg csak a* π *permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy* τ *már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük a* τ *tetszőleges* $\mathbf{A}_5$*-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a* τ_1 *és a* τ_2 *permutációk már benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a* $\tau_1\tau_2$ *permutációt. Legalább hány euróra van szükségünk, hogy* $\mathbf{A}_5$ *bármely elemét beletehessük a halmazba?*

Feladat 22. *(4pt) Tekintsük az* $\mathbf{A}_5$ *csoport* $\pi := (12345)$ *elemét. Van egy halmazunk, amiben eredetileg csak a* π *permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy* τ *már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük a* τ *tetszőleges* $\mathbf{A}_5$*-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a* τ_1 *és a* τ_2 *permutációk már benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a* $\tau_1\tau_2$ *permutációt. Legalább hány euróra van szükségünk, hogy* $\mathbf{A}_5$ *bármely elemét beletehessük a halmazba?*

Feladat 23. *(4pt) Tegyük fel, hogy a* $\mathbf{G}$ *csoport a* $\mathbf{H}_1$ *és* $\mathbf{H}_2$ *részcsoportjainak belső direkt szorzata, továbbá* $\mathbf{G}$ torziómentes*: az egységelem kivételével bármely elem rendje végtelen. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges* $g \in G$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, amennyiben* $g^n \in H_1$*, akkor* $g \in H_1$*. Ezután lássuk be, hogy ha az* $\mathbb{R}$ *csoportot felírjuk két részcsoportja belső direkt szorzataként, akkor legalább az egyik tényezőnek lesz* $\mathbb{Q}$*-val izomorf részcsoportja.*